1 Bsp. 46:

Kurvenintegrale

$$\int_C \vec{K}(x,y)\ d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}\ dt \tag{1.1}$$

a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$.
Damit

$$\int_C \vec{K}\ d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \cdot t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}\ dt \tag{1.2}$$

$$= \int_0^1 t^2 - 2t^4 dt \tag{1.3}$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{15} \tag{1.4}$$

b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}$, C ist der Parabel $x = 1 - y^2$ von (0,-1) bis (0,1).
Damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t \end{pmatrix} mit - 1 \leq t \leq 1 \tag{1.5}$$

$$\int_C \vec{K}\ d\vec{x} = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ (1-t^2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}\ dt \tag{1.6}$$

$$= \int_{-1}^1 (-2t^4 + 1 - 2t^2 + t^4) dt \tag{1.7}$$

$$= -\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\Bigg|_{-1}^1 = \frac{4}{15} \tag{1.8}$$

c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C \vec{K}\ d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{t^2-1} \\ t^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^3 \end{pmatrix}\ dt \tag{1.9}$$

$$= \int_0^1 (2te^{t^2-1} + 3t^7)dt \tag{1.10}$$

$$= e^{t^2-1} + \frac{3t^8}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{e} + \frac{11}{8} \tag{1.11}$$

2 Bsp. 47:

Linienintegrale

$\int_C xydx + ydy$, $C : y = sin(x)$ mit $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Damit $\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ sin(t) \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} tsin(t) \\ sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ cos(t) \end{pmatrix}\ dt \tag{2.1}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} tsin(t) + sin(t)cos(t)dt \tag{2.2}$$

$$= sin(t) - tcos(t) - \frac{cos(t)^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{2.3}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \tag{2.4}$$

3 Bsp. 48

$\int_C zdx + xdy + ydz$,

Damit $\vec{K} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ und $C_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ und C_2 ist die gerade von P(1,1,1) zu P(0,0,0) $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}$
$mit\ 0 \leq t \leq 1.$

$$I = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \; dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \; dt \tag{3.1}$$

$$= \int_0^1 (2t^3 + 3t^4 + 2t^4 + 3t - 3)dt \tag{3.2}$$

$$= -3t + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^4}{2} + t^5 \Big|_0^1 \tag{3.3}$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - 2 = 0 \tag{3.4}$$

4 Bsp. 49:

a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$ und C die Gerade von P(1,2) nach Q(3,4).
Zuerst müssen wir die Gerade $\vec{x}$ parametrisieren.

$$\vec{x} = P + t(Q-P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Damit

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} (2t+1)(2t+2) \\ (2t+1)+(2t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^2+6t+2 \\ 4t+3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\int_C \vec{K} \; d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^2+6t+2 \\ 4t+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; dt \tag{4.3}$$

$$= \int_0^1 (8t^2 + 20t + 10)dt \tag{4.4}$$

$$= \frac{8t^3}{3} + \frac{20t^2}{2} + 10t \Big|_0^1 = \frac{60}{3} + \frac{8}{3} = \frac{68}{3} \tag{4.5}$$

b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und C die Parabel $y = 4 - x^2$ von P(-2,0) nach Q(0,4).
Zuerst müssen wir die Parabel $\vec{x}$ parametrisieren.
Wir setzen $x = t$ mit -2 $\leq t \leq 0$, damit ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\int_C \vec{K}\ d\vec{x} = \int_{-2}^{0} \begin{pmatrix} t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}\ dt \tag{4.7}$$

$$= \int_{-2}^{0} (t - 8t + 2t^3) dt \tag{4.8}$$

$$= \frac{7t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \Bigg|_{-2}^{0} = 14 - 8 = 6 \tag{4.9}$$

c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ -x \end{pmatrix}$ und C ist gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C \vec{K}\ d\vec{x} = \int_{0}^{1} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}\ dt \tag{4.10}$$

$$= \int_{0}^{1} (3t^3 - 3t^3) dt \tag{4.11}$$

$$= 0 \tag{4.12}$$

d) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \\ y \end{pmatrix}$ und C ist gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C \vec{K}\ d\vec{x} = \int_{0}^{1} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t \cdot e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}\ dt \tag{4.13}$$

$$= \int_{0}^{1} (e^{2t} + 1 - e^{-t} + 4e^t) dt \tag{4.14}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2} + e^{-t} + 4e^t + t \Bigg|_{0}^{1} \tag{4.15}$$

$$= \frac{e^2}{2} + 1 + \frac{1}{e} + 4e - \frac{1}{2} - 1 - 4 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} + 4e - \frac{9}{2} \tag{4.16}$$

5 Bsp. 50:

Die Schwerpunkt koordinaten sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)\ ds \tag{5.1}$$

$$y_s = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)\ ds \tag{5.2}$$

mit $m = \int_C \rho(x,y)ds$, $\rho(x,y) = 1-y$ und $x^2+y^2 = 1$.

Wir setzen $x = t$ und berechnen m mit folgende Formel:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt. \tag{5.3}$$

$$m = \int_C (1-y)\ ds \tag{5.4}$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[1-\sqrt{1-t^2}\right] \cdot \sqrt{1+\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\ dt \tag{5.5}$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[1-\sqrt{1-t^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \tag{5.6}$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right]\ dt = \pi - 2 \approx 1.14 \tag{5.7}$$

Jetzt rechnen wir x_s und y_s

$$x_s = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1} t\cdot\left[1-\sqrt{1-t^2}\right] \cdot \sqrt{1+\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\ dt \tag{5.8}$$

$$x_s = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1}\left[t-t\sqrt{1-t^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\ dt \tag{5.9}$$

$$x_s = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}-t\right)\ dt = 0 \tag{5.10}$$

$$y_s = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\cdot\left[1-\sqrt{1-t^2}\right]\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt \tag{5.11}$$

$$y_s = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)\right]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\,dt \tag{5.12}$$

$$y_s = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1}1-\frac{\left(1-t^2\right)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1}1-\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{m}\cdot(2-\frac{\pi}{2})\approx 0.38 \tag{5.13}$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes S sind (0, 0.38).

6 Bsp. 51:

Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy \tag{6.1}$$

a) $f(x,y)=yx^2$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten (0,0), (1,0), (0,1).

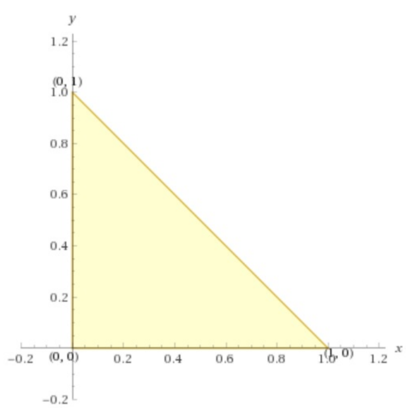

Abbildung 6.1: Das Dreieck mit den Eckpunkten (0,0), (1,0), (0,1)

Wir können durch die Gerade $y=1-x$ die y Grenzen ausdrücken.

$$I = \int_0^1\int_0^{1-x} x^2y\,dydx \tag{6.2}$$

$$I = \int_0^1 \left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_0^{1-x}\,dx \tag{6.3}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^2(-x+1)^2}{2}\ dx \tag{6.4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(x^2 - 2x + 1\right)\ dx \tag{6.5}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{60} \tag{6.6}$$

b) $f(x,y) = y\left(1 - cos(\frac{x\pi}{4})\right)$, wobei B begrenzt wird von den Kurven $x = 0$, $y = \sqrt{x}$ und $y = 2$.

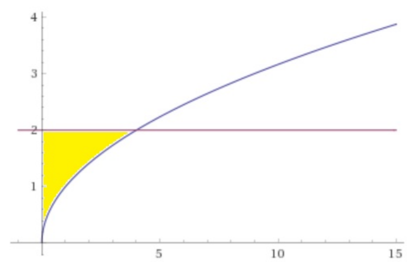

Abbildung 6.2: Bereich B begrenzt von den Kurven $x = 0, y = \sqrt{x}, y = 2$

Für die x Grenzen müssen wir den Schnittpunkt der beiden Funktionen berechnen, indem wir die zwei Funktionen gleich setzen. Als y Grenzen werden wir die funktion $y = \sqrt{x}$ nehmen.
Damit

$$I = \int_{x=0}^4 \int_{y=\sqrt{x}}^2 y\left(1 - cos\left(\frac{x\pi}{4}\right)\right)\ dydx \tag{6.7}$$

$$I = \int_{x=0}^4 \frac{y^2}{2}\left(1 - cos\left(\frac{x\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_{\sqrt{x}}^2\ dx \tag{6.8}$$

$$I = \int_{x=0}^4 \frac{4-x}{2}\left(1 - cos\left(\frac{x\pi}{4}\right)\right)\ dx \tag{6.9}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{x=0}^4 \left[1 + cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) - x - xcos\left(\frac{x\pi}{4}\right)\right]\ dx = 4 - \frac{16}{\pi^2} \approx 2.38 \tag{6.10}$$

c) $f(x,y) = e^{x+y^2}$, B$=\left\{(x,y) \middle| \text{ ln(y)} \leq \text{x} \leq \text{ln(2y)}, 1 \leq \text{y} \leq 2\right\}$

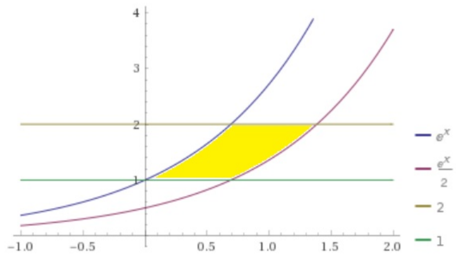

Abbildung 6.3: Bereich B begrenzt von den Kurven $y = e^x, y = \frac{e^x}{2}, y = 1, y = 2$

$$I = \int_{y=1}^{2} \int_{x=\ln y}^{\ln 2y} e^{x+y^2} \; dxdy \tag{6.11}$$

$$I = \int_{y=1}^{2} e^{x+y^2} \Bigg|_{\ln y}^{\ln 2y} dy \tag{6.12}$$

$$I = \int_{y=1}^{2} \left(2ye^{y^2} - ye^{y^2}\right) \; dy \tag{6.13}$$

$$I = \int_{y=1}^{2} ye^{y^2} \; dy = \frac{e^{y^2}}{2}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{e^4 - e}{2} \approx 25.9 \tag{6.14}$$

d) $f(x,y) = (1-x^3)y^2$, B wird begrenzt von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$.

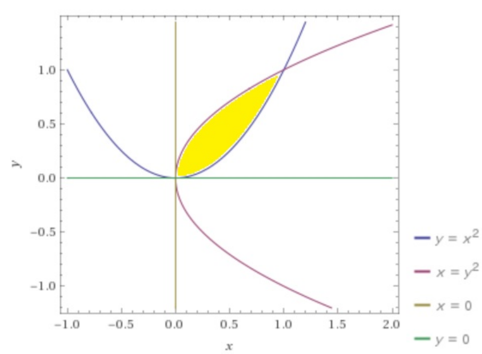

Abbildung 6.4: Bereich B begrenzt von den Kurven $y = x^2$, $x = y^2$

Die Grenzen für y sind bestimmt durch die zwei gegebenen funktionen.
Die Grenzen für x sind durch den Schnittpunkt der beiden Funktionen bestimmt.

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1-x^3)y^2 \; dydx \tag{6.15}$$

$$I = \int_{x=0}^{1} (1-x^3) \frac{y^3}{3} \Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} \; dx \tag{6.16}$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{x=0}^{1} \left(1-x^3\right) \left(x^{\frac{3}{2}} - x^6\right) \; dx \tag{6.17}$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{x=0}^{1} \left[x^9 - x^{\frac{9}{2}} - x^6 + x^{\frac{3}{2}}\right] \; dx = \frac{9}{154} \approx 0.058 \tag{6.18}$$

7 Bsp. 52:

a)$f(x,y) = xy$, B= $\{(x,y)\Big|$ -1 $\leq$ x $\leq$ 2, $-x^2$ $\leq$ y $\leq$ 1+$x^2\}$

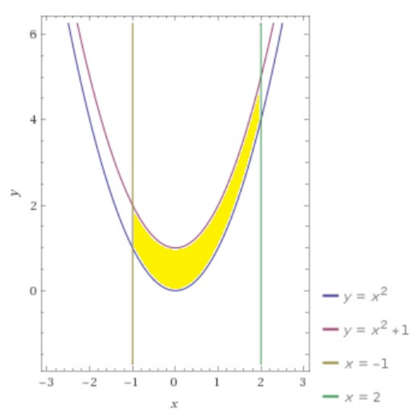

Abbildung 7.1: Bereich B begrenzt von den Kurven $y = x^2$, $y = x^2 + 1$

$$I = \int_{x=-1}^{2} \int_{y=x^2}^{1+x^2} xy \; dydx \tag{7.1}$$

$$I = \int_{x=-1}^{2} \frac{xy^2}{2} \Bigg|_{x^2}^{1+x^2} \; dx \tag{7.2}$$

$$I = \int_{x=-1}^{2} \frac{x(x^4 + 2x^2 + 1}{2} - \frac{x^5}{2}\ dx \tag{7.3}$$

$$I = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \tag{7.4}$$

b)$f(x,y) = 2xy^2$, B wird begrenzt von den Kurven $x = y^2$, $x = 3 - 2y^2$.

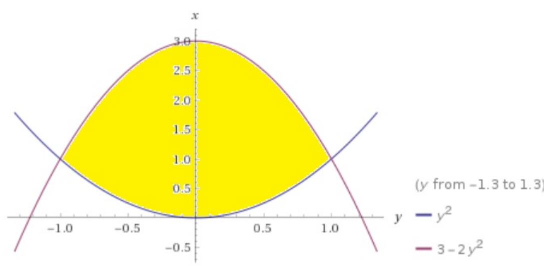

Abbildung 7.2: Bereich B begrenzt von den Kurven $x = y^2$, $x = -2y^2 + 3$

$$I = \int_{y=-1}^{1} \int_{x=y^2}^{3-y^2} 2xy^2\ dxdy \tag{7.5}$$

$$I = \int_{x=-1}^{1} x^2 y^2 \Bigg|_{x=y^2}^{3-y^2} dy \tag{7.6}$$

$$I = \int_{x=-1}^{1} \Big[(9 - 12y^2 + 4y^2)y^2 - y^4 y^2\Big]\ dy \tag{7.7}$$

$$I = \frac{3y^7}{3} - \frac{12y^5}{5} + 3y^3\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{72}{35} \approx 2.06 \tag{7.8}$$

8 Bsp. 53:

Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgende Integral

$$I = \int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dxdy \tag{8.1}$$

Die Polarkoordinaten sind gegeben durch $x = rcos(\phi)$ und $y = rsin(\phi)$, mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
Um die koordinaten Transformation in der Integral zu setzen müssen wir zuerst die Jacobi determinante ausrechnen.

$$det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = r \cdot \cos\phi^2 + r \cdot \sin\phi^2 = r \tag{8.2}$$

Damit ist $dxdy = rdrd\phi$.

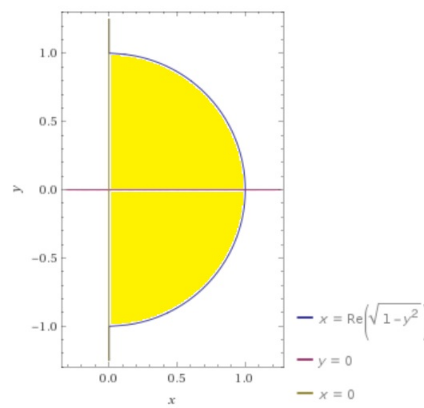

Abbildung 8.1: Integrationsbereich.

$$I = \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+r^2\cos\phi^2 + r^2\sin\phi^2} \cdot r \, d\phi dr \tag{8.3}$$

$$I = \int_{0}^{1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{1+r^2} \, d\phi dr \tag{8.4}$$

$$I = \int_{0}^{1} \frac{r}{1+r^2} \cdot \phi \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr \tag{8.5}$$

$$I = \pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\ dr \tag{8.6}$$

$$I = \frac{\pi}{2} \ln r^2 + 1 \Big|_0^1 = \frac{\pi \ln 2}{2} \approx 1.09 \tag{8.7}$$

9 Bsp. 54:

Man berechne das Integral

$$I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=1}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{1-z}} y \cos x\ dydzdx \tag{9.1}$$

$$I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=1}^{2} \frac{y^2}{2} \cos x \Big|_0^{\sqrt{1-z}}\ dzdx \tag{9.2}$$

$$I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=1}^{2} \frac{1-z}{2} \cos x\ dzdx \tag{9.3}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} z - \frac{z^2}{2} \cos x \Big|_1^2\ dx \tag{9.4}$$

$$I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos x\ dx \tag{9.5}$$

$$I = -\frac{1}{4} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}. \tag{9.6}$$

10 Bsp. 55:

Man berechene das Integral

$$I = \int \int \int_B f(x,y,z)\ dxdydz \tag{10.1}$$

a)$f(x,y,z) = 2x$, B = $\{(x,y,z) \Big|\ 0 \leq \mathrm{y} \leq 2,\ 0 \leq \mathrm{x} \leq \sqrt{4-y^2},\ 0 \leq \mathrm{z} \leq \mathrm{y}\}$.

$$I = \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{z=0}^{y} 2x\ dzdxdy \tag{10.2}$$

$$I = \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2}} 2xy \; dxdy \tag{10.3}$$

$$I = \int_{y=0}^{2} x^2 y \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} \; dy \tag{10.4}$$

$$I = \int_{y=0}^{2} (4y - y^3) \; dy = \left(2y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 4. \tag{10.5}$$

b)$f(x, y, z) = y$, B ist der Tetraeder, der von den flächen $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y + z = 4$ begrenzt wird.

$$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\frac{4-2x}{3}} \int_{z=0}^{4-2x-3y} y \; dzdydx \tag{10.6}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\frac{4-2x}{3}} 4y - 2xy - 3y^2 \; dydx \tag{10.7}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} -y^3 - 2xy^2 + y^2 \Big|_0^{\frac{4-2x}{3}} \; dx \tag{10.8}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} -\frac{4}{27}(x-2)^3 \; dx \tag{10.9}$$

$$I = -\frac{4}{27}(x-2)^3 \Big|_0^2 = \frac{16}{27} \tag{10.10}$$

c)$f(x, y, z) = x$, B wird begrenzt von dem Paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$, und der Ebene $x = 4$.
Der Ebene $x = 4$ schneidet den Poraboloid in einer Schüssel form. Die Schnittfläche wird durch bestimmt indem wir $x = 4$ in der Gleichung $x = 4y^2 + 4z^2$ einsetzen. Dies ergibt einen Kreis beschrieben durch $y^2 + z^2 = 1$.
Wir können zuerst über die x achse integrieren und dann mit polar Koordinaten weiter rechnen.

$$I = \int \int_{y^2+z^2=1} \int_{4y^2+4z^2}^{4} x \; dxdydz \tag{10.11}$$

$$I = \int \int_{y^2+z^2=1} \frac{x}{2} \Big|_{4y^2+4z^2}^{4} \; dydz \tag{10.12}$$

$$I = \int \int_{y^2+z^2=1} \frac{1}{2}\left(16 - 16\left(y^2+z^2\right)^2\right)\ dydz \tag{10.13}$$

Durch die polar koordinaten ist $r = \sqrt{y^2+z^2}$, Damit folgt:

$$I = 8\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^4\right) r\ drd\theta \tag{10.14}$$

$$I = 16\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{16\pi}{3} \tag{10.15}$$

d) $f(x,y,z) = 3x + xz$, B wird begrenzt vom Zylinder $x^2+z^2 = 9$ sowie den Ebenen $y+z=3$, und $y=0$.

$$I = \int_{x=-3}^{3}\int_{z=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{y=0}^{3-z} 3x + xz\ dydzdx \tag{10.16}$$

$$I = \int_{x=-3}^{3}\int_{z=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 3xy + xzy\Big|_0^{3-z}\ dzdx \tag{10.17}$$

$$I = \int_{x=-3}^{3}\int_{z=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} -x\left(z^2-9\right)\ dzdx \tag{10.18}$$

$$I = \int_{x=-3}^{3} -x\left(\frac{z^3}{3}-9z\right)\Big|_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\ dx \tag{10.19}$$

$$I = \int_{x=-3}^{3} \frac{3}{2}x\sqrt{9-x^2}\left(x^2+18\right)\ dx \tag{10.20}$$

$$I = -\frac{2}{15}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x^2+36\right)\Big|_{-3}^{3} = 0 \tag{10.21}$$

$f(x,y,z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2+z^2 = y^2$ sowie den Ebenen $z=0$, und $y=9$.

$$I = \int_{y=0}^{9}\int_{x=-\frac{y}{3}}^{\frac{y}{3}}\int_{z=0}^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\ dzdxdy \tag{10.22}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{9} \int_{x=-\frac{y}{3}}^{\frac{y}{3}} y^2 - 9x^2 \; dxdy \tag{10.23}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{9} y^2 - 3x^3 \Big|_{-\frac{y}{3}}^{\frac{y}{3}} \; dy \tag{10.24}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{9} \frac{4y^3}{9} \; dy = \frac{y^4}{18}\Big|_0^9 = \frac{729}{2} \tag{10.25}$$

11 Bsp.56:

Man berechne das Volumen des kommenden begrenzten Bereichs.

$$3x + 2yz = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \tag{11.1}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\frac{6-3x}{2}} \int_{z=0}^{6-3x-2y} \; dzdydx \tag{11.2}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\frac{6-3x}{2}} 6 - 3x - 2y \; dydx \tag{11.3}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} 6y - 3xy - 2y^2 \Big|_0^{\frac{6-3x}{2}} \; dx \tag{11.4}$$

$$I = \int_{x=0}^{2} 9 - 9x + \frac{9x^2}{4} \; dx \tag{11.5}$$

$$I = 9x - \frac{9x^2}{2} + \frac{3x^3}{4}\Big|_0^2 = 6. \tag{11.6}$$

12 Bsp. 57:

Man berechne das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und über der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$.
Unter verwendung von Polarkoordinaten ($x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$) können wir z durch r ersetzen, da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und damit nur mehr eine Flächenintegral rechnen.

$$I = \int_{r=0}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} r \cdot r \; d\phi dr \tag{12.1}$$

$$I = \int_{r=0}^{2} 2\pi r^2 \; dr = \left. \frac{2\pi r^3}{3} \right|_0^2 = \frac{16\pi}{3} \tag{12.2}$$

13 Bsp.58:

Man berechne das Integral

$$beginalign I = \int \int \int_B x \; dV \tag{13.1}$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der eingeschlossen wird von den Ebenen $z = 0$ und $z = x + y + 5$ sowie den Zylindern $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + y^2 = 9$.
Zuerst machen wir die Koordinaten transformation:

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{pmatrix} \tag{13.2}$$

Wobei das Volumenelement $rdrd\phi dz$ entspricht.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_2^3 \int_0^{r(\cos\phi + \sin\phi)+5} r\cos\phi \; rdzdrd\phi \tag{13.3}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_2^3 \int_0^{r(\cos\phi + \sin\phi)+5} r^2\cos\phi \; dzdrd\phi \tag{13.4}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_2^3 r^2 \cos\phi \left(r\left(\cos\phi + \sin\phi\right) + 5 \right) \; drd\phi \tag{13.5}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{12} r^3 \cos\phi \left(3r\sin\phi + 3r\cos\phi + 20\right) \right|_2^3 d\phi \tag{13.6}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{5}{12} \cos\phi \left(39\sin\phi + 39\cos\phi + 76\right) \; d\phi \tag{13.7}$$

$$I = \left. \frac{5}{48} \left(78\phi - 78\cos\phi^2 + \sin\phi\left(78\cos\phi + 304\right) \right) \right|_0^{2\pi} \tag{13.8}$$

$$I = \frac{65\pi}{4} \approx 51.05 \tag{13.9}$$

14 Bsp. 59:

Man berechne das Integral

$$I = \int\int\int_B x\ dV \tag{14.1}$$

wobei der Bereich B der im ersten Oktanten ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) liegende Teil des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ ist, der nach oben von der Ebene $z = 4$ begrenzt wird.

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r^2} r^2 \cos\phi\ dz d\phi dr \tag{14.2}$$

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos\phi\ d\phi dr \tag{14.3}$$

$$I = \int_0^2 r^4 \sin\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\ dr \tag{14.4}$$

$$I = \int_0^2 r^4\ dr = \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5} \tag{14.5}$$

15 Bsp. 60:

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$I = \int\int\int_B \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2\ dV \tag{15.1}$$

Dabei bezeichnet B die Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Rdius 5.
Die Kugelkoordinaten Transformation ist hier dargestellt.

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{15.2}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{15.3}$$

$$z = r \cos\theta \tag{15.4}$$

Wobei $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \left(r^2 \sin\theta^2 \cos\phi^2 + r^2 \sin\theta^2 \sin\phi^2 + r^2 \cos\theta^2\right)^2 \tag{15.5}$$

$$= \left(r^2 \left(\sin\theta^2 \left(\cos\phi^2 + \sin\phi^2\right) + \cos\theta^2\right)\right)^2 = r^4. \tag{15.6}$$

$$I = \int_0^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^6 \sin\theta \; d\phi d\theta dr \tag{15.7}$$

$$I = \int_0^5 \int_0^\pi 2\pi r^6 \sin\theta \; d\theta dr \tag{15.8}$$

$$I = \int_0^5 2\pi r^6 \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^\pi \; dr = 4\pi \int_0^5 r^6 dr = \frac{4\pi 5^7}{7} \tag{15.9}$$

16 Bsp. 61:

Man bestimme die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation

$$x = u^2 + w^2 \tag{16.1}$$

$$y = u + 3w \tag{16.2}$$

$$z = u^2 - v^2 + w^2 \tag{16.3}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 0 & 2w \\ 1 & 0 & 3 \\ 2u & -2v & 2w \end{vmatrix} \tag{16.4}$$

$$detJ = 12uv - 4vw \tag{16.5}$$